



# La distribución de los rendimientos y el supuesto de normalidad

**Dr. Fernando Servín y Silva**

Universidad de Celaya

**E**n este trabajo se hace un análisis de los estimadores de la varianza de los cuatro momentos (media aritmética, varianza, coeficiente de asimetría y curtosis) de la serie de los rendimientos de un activo financiero, sin tener que recurrir al supuesto de normalidad.

En una segunda etapa se muestran los resultados numéricos del primer inciso aplicándolos a la serie de los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.

En la etapa final del reporte se validan los resultados en cuanto a la forma de la distribución de la varianza de los momentos, empleando un procedimiento de simulación-muestreo inspirado en la metodología bootstrap.





## Return Distribution and Normality Assumption

This paper analysed the variance estimators of the four moments (mean, variance, skewness coefficient and kurtosis) of the series of returns of a financial asset without resorting to the assumption of normality.

In a second stage, the numerical results of the first paragraph applied to the returns series of the Prices and Rates Index of the Mexican Stock Exchange, are shown.

In the final stage of the report results are validated regarding the form of distribution of the variance of the moments, using a simulation-sampling procedure inspired by bootstrap methodology.

## INTRODUCCIÓN

**P**or más que se parezcan no es lo mismo un cisne que un pato y no por que los patos se encuentren de manera más frecuente que los cisnes, cuando se sabe con toda certeza de que se trata de un cisne, de manera forzada se le quiera tratar como pato.

Con el párrafo anterior se pretende ejemplificar el dilema recurrente al que se enfrentan los econométristas financieros ante la distribución normal y la distribución de frecuencias de las series de los rendimientos de cualquier activo. Esta famosa distribución, que a la fecha no tiene nombre propio ni expresión matemática que la describa, se le conoce como una distribución acampanada, con exceso de curtosis (leoptocúrtica), centrada en el origen, ligeramente asimétrica y con colas pesadas.

Por la dificultad que representa no contar con una expresión matemática que indique con toda precisión la distribución de los rendimientos y por la facilidad que conlleva el usar como aproximación a una normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , las más de las veces se recurre a supuestos simplificadores que no resuelven el problema de fondo y si nos alejan de la realidad empírica.

A lo largo del tiempo, se han empleado distintas distribuciones de probabilidad en el afán de obtener mejores aproximaciones a la de los rendimientos de los activos financieros. Empezando por las aproximaciones de Mandelbrot (1963) con la familia de distribuciones Pareto-estables; continuando con los trabajos de Praetz (1972), Blattberg y Gonedes (1974) que utilizan la  $t$  de Student; la distribución logística de Smith (1981); y la distribución general de errores propuesta por Gray y French (1990).

Desde la perspectiva de la microestructura de los mercados financieros, los cuatro primeros momentos  $m_i$  (media, varianza, sesgo, curtosis), asociados a la distribución de frecuencias de los rendimientos tienen importantes interpretaciones prácticas. Conocer estos valores es un primer acercamiento para comprender el comportamiento de los precios del activo del que se trate. Además, el hecho de que no se pueda contar con la expresión matemática de la distribución de los rendimientos asociada, no implica que no se puedan obtener estimaciones de los  $m_i$  con  $i=1, 2, 3, 4$ .

Palabras  
clave

Distribución de los rendimientos  
Caminata Aleatoria . Ruido Blanco no Gaussiano  
Coeficiente de Asimetría . Varianza . Curtosis

Sabemos que cualquier ejercicio de inferencia estadística implica cuando menos dos etapas: estimar los valores de los parámetros que se desea y hacer las pruebas de significancia asociadas a los mismos. Construir los intervalos de confianza y hacer pruebas de hipótesis de los valores poblacionales de los  $m_i$  no tiene ninguna dificultad si reconocemos que los rendimientos  $\{r_t\}$  son iid y suponemos además, que siguen una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Por lo que la gran mayoría de los trabajos de investigación que tocan este tema, recuerden a este supuesto simplificador.

En este trabajo partimos de la base de que suponer la normalidad de las innovaciones es inaceptable pues de acuerdo con el principio de falsación de Karl Popper, si bien es cierto que no conocemos la forma analítica de los  $\{r_t\}$ , si sabemos con toda certeza que no se trata de una normal - en palabras de Karl Popper: no sabemos lo que es pero si lo que no es -.

Los objetivos propuestos en esta disertación son tres:

- I. Identificar las distribuciones de probabilidad asociadas con los estimadores de los cuatro momentos sin tener que recurrir al supuesto de normalidad para la serie de los rendimientos.
- II. Tomando como base los resultados del punto anterior, obtener expresiones analíticas que permitan llevar a cabo las pruebas de significancia estadística correspondientes a los valores poblacionales de los cuatro primeros momentos  $m_i$ .
- III. Aplicar los resultados de los dos puntos anteriores, a la serie de los rendimientos que se genera a partir de los valores diarios del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).
- IV. Corroborar por algún procedimiento alternativo los resultados obtenidos a partir de los tres primeros incisos.

La estructura de este reporte es la siguiente: La introducción en el apartado I, se continúa con el marco teórico en el apartado II, en el punto III se presentan los resultados obtenidos en el inciso anterior, al

aplicarlos a la serie del IPC construida a partir de 5017 observaciones diarias comprendidas entre el 11 de Noviembre del 2001 al 21 de Abril de 2011. La serie de datos se obtuvo de Finanzas Yahoo y el software estadístico empleado fue Excel y Minitab versión 15. En la segunda parte de este mismo inciso se contrastan los resultados alcanzados, para lo que se usa un procedimiento de muestreo estadístico inspirado en el esquema bootstrap, en la parte IV se presentan las conclusiones. Al final del reporte se agrega la bibliografía en el inciso V.

## 1. Marco teórico

Contar con el supuesto de normalidad simplifica mucho las cosas al otorgarle importantes propiedades a los estimadores. Estas propiedades se trasladan a la econometría, en el momento en que se asume que los residuales  $\{e_t\}$  son iid y además  $e_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ . De esta manera se describe el comportamiento aleatorio de los rendimientos de acuerdo con el modelo Random Walk propuesto por Fama E. (1964).

En este trabajo se reconoce que los precios de una acción siguen una caminata aleatoria ( $p_t = p_{t-1} + e_t$ ) sólo que los  $\{e_t\}$  son ruido blanco no gaussiano, lo cual tiene importantes implicaciones no sólo desde el punto de vista matemático sino también, desde la perspectiva de la teoría financiera actual.

La no normalidad de los  $\{e_t\}$  abre la posibilidad de describir el proceso de compra-venta de títulos, de manera más apegada a como sucede en la realidad (al menos en los mercados electrónicos). Permite incluir descripciones tales como la presencia de asimetrías en la información y por tanto renunciar a hipótesis muy restrictivas como la de los mercados informacionalmente eficientes. La no normalidad de los residuales le da más consistencia a la teoría de los mercados pues se abre una brecha con dos direcciones: para ir de los resultados de la macroestructura y encontrar su contraparte en la microestructura - y a su vez - partir de las explicaciones en la formación de precios de la microestructura y llegar a las explicaciones de los comportamientos de los rendimientos de la macroestructura.

Es mucho lo que se ha avanzado en el conocimiento de los rasgos característicos Stylized Facts de las series de tiempo de los rendimientos. Lo que más sorprende es que comparten la forma de la distribución las secuencias construidas a partir de las series igualmente espaciadas con observaciones diarias, que las de alta frecuencia asociada a los rendimientos de las transacciones intradía. Lo mismo las utilizan quienes se encuentran en el trading de manera profesional y cotidiana en los mercados, que los estudiosos de las finanzas bursátiles dentro del ámbito académico.

La figura 1 nos muestra que la distribución de frecuencias de los rendimientos del IPC es acampanada, centrada en el origen, leptocúrtica, con colas pesadas y ligeramente asimétrica (Gatheral J., 2007: 1-8).

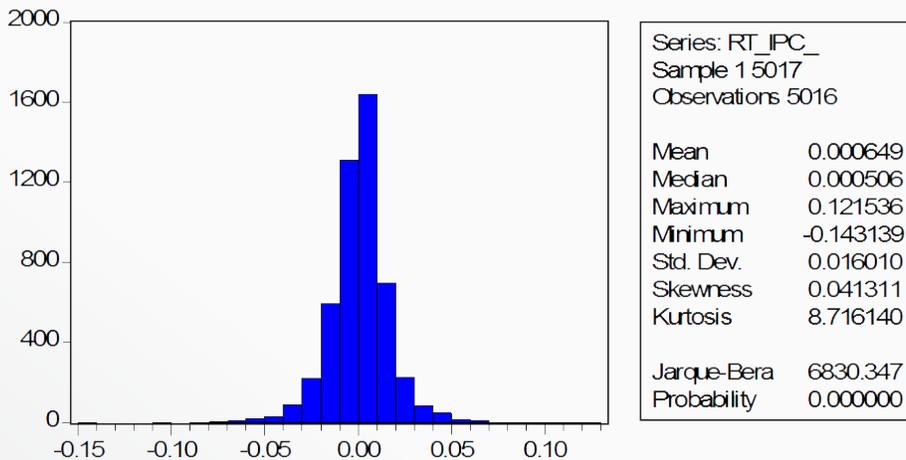


Figura 1.  
 Rendimientos del IPC  
 (1991 - 2011)

En la tabla adjunta aparecen los descriptivos de la serie de 5017 observaciones. Se incluye además, el estadístico Jaque – Bera lo cual confirma la no normalidad de la distribución de los rendimientos. Luego entonces se puede decir de los valores de la tabla, que se trata de una distribución cuyos cuatro primeros momentos son: .000649, .000256, .0413, 8.716. Esta descripción numérica será estadísticamente válida siempre y cuando se demuestre que los valores poblacionales de los tres últimos momentos no son iguales a cero. Además, aunque parece evidente, es necesario también demostrar que la distribución tiene exceso de curtosis.

Si la serie en cuestión  $\{r_t = \ln(\text{IPC}_t / \text{IPC}_{t-1})\}$  construida a partir de los valores del IPC para dos días consecutivos, tiene un comportamiento iid y suponemos que la distribución se comporta como una  $N(\mu, \sigma^2)$ , determinar la distribución de probabilidad de los estimadores de los cuatro momentos no tiene mayor dificultad:

Para la media aritmética de muestras grandes ( $n \geq 30$ ) la distribución de probabilidad asociada al estimador ( $\bar{x}$ ) está dada por  $\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$  y es una normal  $N(0,1)$  con un nivel de significación  $\alpha$ . Si se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$  de una población normal, la distribución muestral de la varianza  $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$  es una  $\chi_{n-1}^2$  (con  $n - 1$  grados de libertad). Para el tercer momento ( $\tau$ ) la distribución de probabilidad del coeficiente de asimetría está dada por  $\sqrt{n}(\hat{\tau}) \rightarrow N(0,6)$  en donde la varianza  $\sigma_2 = 6$

Finalmente para el cuarto momento, la expresión siguiente permite hacer la prueba de hipótesis mediante la expresión  $\sqrt{n}(\hat{\kappa} - 3) \rightarrow N(0,24)$

en donde la varianza  $\sigma_2 = 24$  (Tsay R.; 2005).

Para el caso en el que la distribución de los  $\{r_t\}$  tiene un comportamiento iid no gaussiano, lo descrito en los renglones anteriores no se puede aplicar. La gran limitante a todo lo anterior es que la no normalidad de los  $\{r_t\}$  queda demostrada estadísticamente mediante la prueba Jarque – Bera y la distribución de los rendimientos es más “estilizada” tal como lo observamos en los resultados de la figura 1.

## 2. Distintas aproximaciones

Una descripción más técnica de las distribuciones de probabilidad que se mencionan en la introducción y que fueron propuestas por diferentes autores intentando lograr una adecuada aproximación son: La familia de las distribuciones Pareto-Estables (PE) propuesta por uno de los primeros autores que analiza la campana generada por los  $\{r_t\}$ . Esta familia no admite una expresión analítica explícita para las funciones de densidad, por lo que se definen por el logaritmo de su función característica (Mandelbrot, 1963).

La t de Student “se obtiene al suponer un proceso estocástico subordinado normal y un proceso de dirección con distribución gamma-2 inversa. La distribución t de Student fue propuesta por autores como Praetz (1972) y Blattberg y Gonedes (1974)”. Peiro Gimenez (1992, p. 432).

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi(\nu-2)\sigma^2}} \left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{(\nu-2)\sigma^2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$$

Otra alternativa de aproximación se obtiene a partir de los modelos de mixtura de distribuciones, particularmente la que se refiere a la mezcla de dos distribuciones normales. El procedimiento consiste en definir la variable  $x \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  con probabilidad  $p$  y la misma variable  $x \sim N(\mu_2, \sigma_2)$  con probabilidad  $(1-p)$ , de forma que la función de densidad es igual a:

$$f(x) = \frac{p}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{(1-p)}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Bajo estas condiciones  $E[x] = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$  mientras que la varianza está es igual: (Cohen, 1967)

$$\text{Var}(x) = p[(\mu_1 - E(x))^2 + \sigma_1^2] + (1-p)[(\mu_2 - E(x))^2 + \sigma_2^2]$$

Una tercera aproximación de uso frecuente es la que se obtiene mediante la distribución logística y cuya ecuación es la siguiente:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\delta}}}{\alpha(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\delta}})^2}$$

En este caso  $\mu$  es la esperanza matemática de  $x$  (localización) y  $\delta$  un parámetro de escala cuya relación con la desviación típica de  $x$  es:

$$\delta = \sqrt{3} \frac{\sigma}{n}$$

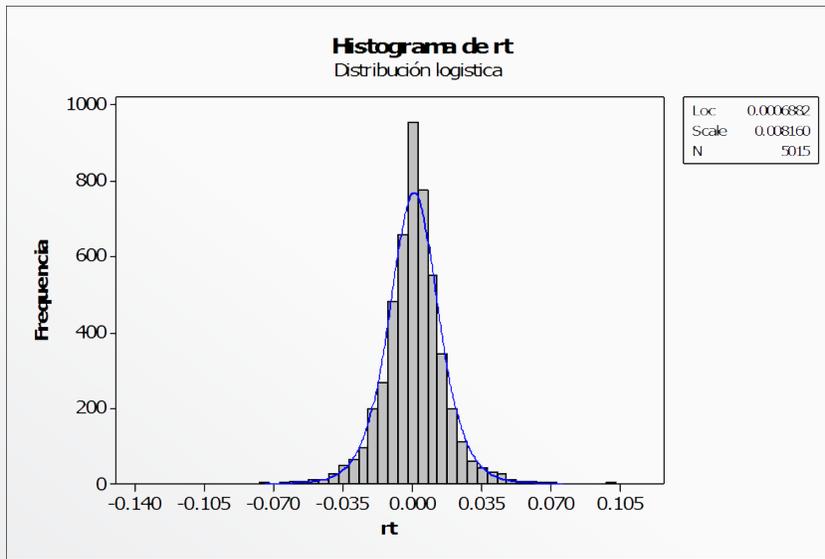


Figura 2.  
 Aproximación de la distribución logística

Una restricción importante al estimar los  $\mu_i$  con  $i=1, 2, 3$  y  $4$  a partir de alguna de las aproximaciones propuestas anteriormente, es que los resultados dependen no sólo de los valores que conforman la distribución de los rendimientos, sino del modelo empleado para hacer la aproximación (t de Student, logística, lognormal, etc.).

Distribución	T de Student	Mixtura de 2 Normales	Logística	Log-normal
Media	$\mu=0$ si $v>1$	$\mu_1, \mu_2$	$\mu$	$\mu = e^{\bar{x}+s^2/2}$
Varianza	$\sigma^2=v/(v-2)$ si $v>0$	$\sigma_1^2, \sigma_2^2$	$\sigma^2=\pi^2 s^2/3$	$\sigma^2 = e^{2\bar{x}+4s^2/2}$
Asimetría	$\tau=0$ si $v>3$	$\tau_1, \tau_2$	$\tau=0$	$\tau = e^{3\bar{x}+9s^2/2}$
Curtosis	$\kappa=6/(v-4)$ si $v>4$ <sup>1</sup>	$\kappa_1, \kappa_2$	$\kappa=6/5$	$k = e^{4\bar{x}+16s^2/2}$

Tabla 1.  
 Momentos asociados a las distintas distribuciones

<sup>1</sup>En la t de student la  $v$  se refiere a los grados de libertad. ( $v$  es el número de observaciones menos uno).

Eliminar el supuesto de normalidad de la estadística paramétrica parece cosa menor, pero como se puede ver en este artículo, el desarrollo de cualquier investigación se convierte, sin este supuesto, en una carrera de obstáculos algunos de ellos fácilmente superados pero otros conllevan importantes dificultades tanto de origen econométrico como financiero.

## 2.1 Los cuatro momentos bajo condiciones de no normalidad

Aplicando el Teorema Central del Límite, si  $\{r_t\}$  son iid con media  $\mu$  y varianza finita  $\sigma^2 \neq 0$ . Si definimos  $S_n=r_1+r_2+\dots+r_n$  entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}} \leq r\right) = N(0,1)$$

Esto significa que independientemente de la forma de la distribución de los  $\{r_t\}$ , podemos afirmar que respecto al primer momento  $\mu=E[r_t]$  las cosas no cambian pues si el tamaño de la muestra es  $n \geq 30$  la distribución de probabilidad del estimador de la media converge en distribución a una normal  $N(0,1)$ , más específicamente:

$\frac{r - \mu}{s/\sqrt{n}}$  es una normal  $N(0,1)$  con un nivel de significación  $\alpha$

En general, al cumplirse el Teorema Central del Límite y tener momentos finitos hasta de grado ocho, la distribución de probabilidad asociada a cada uno de los momentos siguientes es una normal. Si  $\mu_k=E[(r_t - \mu)^k]$  es el momento central de grado  $k=1,2,3,4$  en donde  $\mu_2=E[(r_t - \mu)^2]=\sigma^2$  el coeficiente de sesgo ( $\tau$ ) y de curtosis ( $k$ ) están dados por:

$$\tau = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E[(r_t - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

$$k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E[(r_t - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

Para el caso de  $m_2 = \mu_2$  la situación es la siguiente: Si  $\{r_t\}$  es estacionaria hasta al menos de cuarto orden, la distribución de probabilidad asociada a la varianza de la varianza está dado por la expresión:

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) = \frac{\alpha}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n Y_t + Op(1)$$

En donde  $\{r_t\}$  es la serie de los rendimientos con  $t=1, \dots, n$ .  $\rho = [1 \quad -2\mu_1 \quad -1/n]$  y  $\hat{R} = n(E[\hat{Y}\hat{Y}'])$  donde  $\hat{Y}$  es la media de la muestra de  $Y_t$ , que a su vez está dada por:

$$Y_t = \begin{bmatrix} (r_t - \mu)^2 - \mu^2 \\ (r_t - \mu) \\ (r_t - \mu)^2 - \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Finalmente la distribución de probabilidad asociada a la varianza de la varianza está dada por:

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, (\frac{\hat{\rho}\hat{R}\hat{\rho}^t}{\sigma^4})^{1/2})$$

Esta expresión significa que cuando  $n \rightarrow \infty$  la diferencia entre la varianza estimada y la poblacional convergen en distribución a una normal con media cero y varianza la que aparece en la expresión inmediata anterior. De manera similar, la distribución de probabilidad para la diferencia de los coeficientes de asimetría se obtiene mediante la formula:

$$\sqrt{n}(\hat{\tau} - \tau) \xrightarrow{d} N(0, (\frac{\alpha\Psi\alpha^t}{\sigma^6})^{1/2})$$

En donde  $\{r_t\}$  es la serie de los rendimientos con  $t=1, \dots, n$ .  $\alpha = [1 \quad -3\mu_2 \quad -3\tau\sigma/2]$  y  $\Psi = n(E[\hat{Y}\hat{Y}'])$ . Aquí  $\hat{Y}$  es la media de la muestra de  $Y_t$ , que a su vez está dada por:

$$Y_t = \begin{bmatrix} (r_t - \mu)^3 - \mu^3 \\ (r_t - \mu) \\ (r_t - \mu)^2 - \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Para el caso particular en el que  $H_0: \tau=0$  y  $H_a: \tau \neq 0$  se tiene como distribución del estimador del coeficiente de sesgo:

$$\frac{\sqrt{n}\hat{\tau}}{s(\hat{\tau})} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

La distribución de probabilidad para el error de estimación de  $\hat{\tau}$  converge en distribución a una  $N(0,1)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La única "dificultad" es que al emplear la relación matemática anterior se requiere tener un estimado de  $s(\hat{\tau})$ . Bajo estas condiciones la desviación estándar está dada por:

$$s(\hat{\tau}) = \left( \frac{\hat{\alpha}' \hat{\Psi} \hat{\alpha}}{\hat{\sigma}^6} \right)^{1/2}$$

Respecto al cuarto momento el planteamiento es similar al de los dos casos anteriores:

$$\sqrt{n}(\hat{k} - k) \xrightarrow{d} N\left(0, \left( \frac{\hat{\beta}' \hat{\Omega} \hat{\beta}}{\hat{\sigma}^8} \right)^{1/2}\right)$$

En donde  $\{r_t\}$  es la serie de los rendimientos con  $t=1, \dots, n$ .  $\beta = [1 \ -4\mu_3 \ -3\sigma^2 k]$  y  $\Omega = n(E[\hat{W}\hat{W}'])$  en donde  $\hat{W}$  es la media de la muestra de  $W_t$ , que a su vez esta dada por:

$$W_t = \begin{bmatrix} (r_t - \mu)^4 - k \\ (r_t - \mu) \\ (r_t - \mu)^2 - \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Para el caso particular en el que  $H_0: k=3$  y  $H_a: k \neq 3$  se tiene como distribución del estimador del coeficiente de curtosis:

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{k} - 3)}{s(\hat{k})} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Si  $n \rightarrow \infty$  la distribución de probabilidad para el error de estimación de  $\hat{k}$  converge en distribución a una  $N(0,1)$ . De manera similar al caso anterior, para emplear la relación matemática anterior se requiere un estimado de  $s(\hat{k})$ . Bajo estas condiciones la desviación estándar está dada por:

$$s(\hat{k}) = \left( \frac{\hat{\beta}' \hat{\Omega} \hat{\beta}}{\hat{\sigma}^8} \right)^{1/2}$$

### 3. Resultados numéricos.

A partir de los resultados de la figura 1, un estimado de los cuatro primeros momentos es:  $m_1=.000649$ ,  $m_2=.000256$ ,  $m_3=.0413$  y  $m_4=8.716$ . De acuerdo con investigaciones previas Stylized Facts debemos rechazar la hipótesis nula ( $H_0: m_i=0$ ) para  $i=1,2,3$  y la de exceso de curtosis la cual implica ( $H_0: m_4 \leq 3$ ) para el cuarto momento.

En el caso del primer momento  $H_0: \mu=0$  usamos como estadístico de prueba  $\pi_1$  el cual está dado por la expresión:

$$\pi_1 = \frac{\bar{r} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1)$$

Sustituyendo los valores numéricos para obtener  $\pi_1$  se tiene:

$$\hat{\pi}_1 = \frac{.000649 - 0}{\frac{.016}{\sqrt{5017}}} = 2.8719$$

El valor de la normal con un nivel de significación de  $\alpha=.05$  es 1.96 por lo que rechazamos  $H_0$ .

Para el caso de la  $\text{var}(s^2)$  planteamos como hipótesis  $H_0: \text{var}(s^2)=0$ . Aquí el estadístico de prueba  $\pi_2$  está dado por la expresión:

$$\pi_2 = \frac{\sqrt{n}}{s(s^2)} s^2 \xrightarrow{d} N(0,1)$$

En donde  $\text{var}(s^2) = \rho R \rho^t$ . Los valores estimados de  $\rho$  y  $R$  están definidos mediante las expresiones:

$$\hat{\rho} = [1, -2\hat{\mu}_1, -1/\sqrt{n}] \text{ en donde } \hat{\mu}_1 = n^{-1} \sum_i^n (x_i - \hat{\mu}) \text{ y } \hat{R} = n(E[\hat{Y}\hat{Y}^t]).$$

$$[1, 6.64598E - 09, -0.014119567] \begin{bmatrix} 0.000256217 \\ -3.32299E - 09 \\ 0.000256217 \end{bmatrix} = 0.000252599$$

El valor de  $\text{var}(s^2) = (.000252599)^2 = 6.38064E-08$  y por tanto el estadístico de prueba  $\pi_2=71.77$  y por tanto se rechaza  $H_0$ .

Para el caso del tercer momento se plantean como hipótesis  $H_0: \tau=0$  versus  $H_a: \tau \neq 0$ . En este caso tenemos un procedimiento similar al de la varianza. Aquí el estadístico de prueba es:

$$\hat{\pi}_3 = \frac{\sqrt{n}}{s(\hat{\tau})} \hat{\tau} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Asignando los valores estimados correspondientes de  $\alpha$  y de  $\Psi$  se tiene:

$$[243683.4239, -187.3828857, 0] \begin{bmatrix} 1.69375E - 07 \\ -3.32299E - 09 \\ 0.000256217 \end{bmatrix} = 0.041274602$$

El valor del estadístico de prueba  $\pi_3$  es igual a 70.88 por lo que se rechaza una vez más  $H_0$ .

Finalmente para el caso del cuarto momento se tiene como hipótesis nula  $H_0: k=3$  y como estadístico de prueba a  $\pi_4$  en donde:

$$\pi_4 = \frac{\sqrt{n(\hat{k} - 3)}}{s(\hat{k})} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$[15258789.06, -10.32775, -0.001536] \begin{bmatrix} 5.72379E - 07 \\ -3.32299E - 09 \\ 0.000256217 \end{bmatrix} = 8.7338$$

Sustituyendo  $\pi_4=46.3520 > 1.98$  por tanto se rechaza  $H_0$ . En los tres casos anteriores se pueden obtener estimaciones de las varianzas asociadas a cada uno de los momentos siempre y cuando se cuente con un número suficientemente grande de observaciones; lo cual para el caso de los rendimientos de las series de precios de títulos financieros, este hecho no es una limitante.

### 3.1 Convergencia del estadístico reprobado hacia la normal.

En las pruebas de hipótesis asociadas a los cuatro momentos se toma como referencia que el estadístico  $\pi_i$  con  $i=1,2,3,4$  converge en distribución hacia la normal en la medida en que  $n$  es cada vez más

grande. Esta convergencia requiere implícitamente que la distribución del estimador de la varianza asociada a cada uno de los cuatro momentos también converja en distribución a una normal centrada en el origen, en la medida en que el número de observaciones es cada vez mayor ( $n \rightarrow \infty$ ).

Con el propósito de corroborar los resultados analíticos comentados en el inciso anterior, empleamos un procedimiento computacional inspirado en un esquema de muestreo y remuestreo repetitivo. El método bootstrap es un procedimiento que permite encontrar la distribución de probabilidad de un estimador a partir de un muestreo que se repite un número muy grande de veces. Se obtienen muchas muestras de tamaño  $n_i$  (con  $i=1,2,..$ ) de una población de tamaño  $N \geq n_i$ . A partir de cada una de las  $n_i$  muestras, se obtienen nuevas muestras aleatorias con remplazo de tamaño  $q_j$  (con  $j=1,2,..$ ). Se calcula el estadístico en cuestión para todas esas muestras y se obtiene la distribución de frecuencias correspondiente. Esta distribución (llamada distribución bootstrap), es una aproximación de la forma de la distribución del estimador muestral.

El esquema empleado en este apartado consistió de 1170 ejercicios de muestreo de diversos tamaños. Desde  $n=5, 10, 15, 50, 250, 500, 750, 1500$  hasta  $n=3500$ . A su vez las repeticiones de cada uno de estos ejercicios fueron desde  $q=20, 35, 60, 100, 120, 195$  hasta  $q=400$ .

Para cada una de estas 1170 muestras se obtuvieron los tres momentos  $m_2, m_3, m_4$ . A partir de estas se calculo la media y la varianza de cada uno de los valores estimados de los tres momentos. Además se obtuvo la distribución de frecuencia asociada en cada uno de los niveles de repetición del muestreo. La gráfica Q-Q y el estadístico Anderson Darling permiten evaluar la calidad del ajuste de la distribución seleccionada que mejor se adecua al conjunto de los datos. Estos resultados, para el caso del segundo momento ( $m_2$ ) se observan en la tabla siguiente:

Repeticiones	Tamaño (n)	$s^2$	$var(s^2)$	A. Darling	p	Distribución
120	5	0.0002634	1.4936E-07	0.593	0.119	lognormal
400	10	0.0002501	3.5389E-08	0.496	0.212	lognormal
20	15	0.0003182	8.3116E-08	0.542	0.143	lognormal
100	50	0.0002672	1.1451E-08	0.464	0.25	lognormal
195	250	0.0002522	1.9634E-09	0.487	0.222	lognormal
120	500	0.0002545	1.0203E-09	0.379	0.4	lognormal/normal
120	750	0.0002584	6.6019E-10	0.346	0.477	lognormal/normal
35	1500	0.000261	4.7108E-10	0.185	0.901	normal
60	3500	0.0002574	1.4869E-10	0.273	0.656	normal

Tabla 2.  
 Momentos asociados  
 a las distintas distribuciones

Los resultados de la tabla reflejan que la distribución de frecuencias a la que converge la distribución del estimador de la varianza  $s^2$  es a una normal y que esta convergencia es más pronunciada en la medida en que el tamaño de la muestra ( $n$ ) va en aumento.

El estadístico Anderson-Darling mide la forma en que los datos de los que se dispone, siguen una distribución de probabilidad en particular. El planteamiento de la prueba de hipótesis es el siguiente;  $H_0$ : Los datos de la muestra provienen (o se ajustan) a una distribución especificada, versus  $H_a$ : Los datos no se ajustan a una distribución especificada. En la medida en que el valor del estadístico es cada vez menor, en esa misma medida se acepta  $H_0$ . (Una forma equivalente de aceptar  $H_0$  es mediante el p-valor. Si este valor es menor que .05 entonces se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación de  $\alpha=.05$ ).

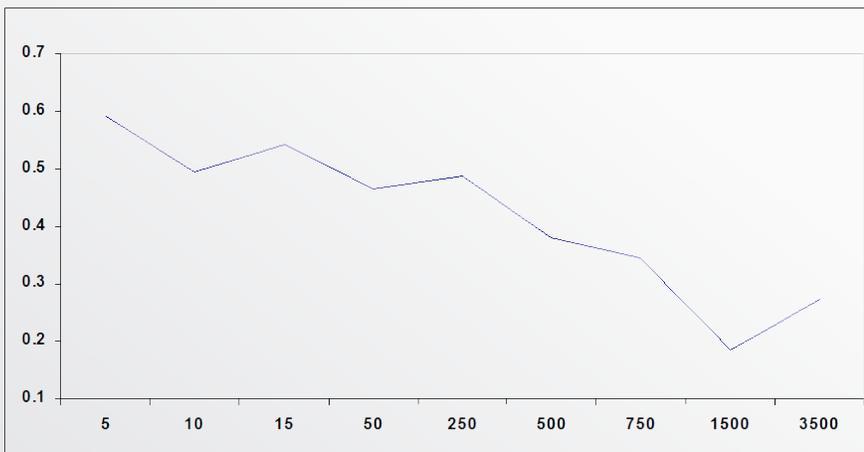


Figura 3.  
Valor del estadístico  
Anderson-Darling vs.  
Tamaño de la muestra

En la figura 3 se observa la tendencia decreciente del valor del estadístico de Anderson-Darling a medida que el valor del tamaño de la muestra ( $n$ ) va en aumento. Esta es una manera gráfica de ilustrar que la  $var(s^2)$  de los datos que se obtienen de cada muestra, se ajustan cada vez más a una normal (convergen en distribución a una normal) en la medida en que  $n \rightarrow \infty$ .

Las conclusiones para el tercero y cuarto momento ( $m^3$  y  $m^4$ ) son similares y se obtienen de los resultados de las dos tablas y las dos gráficas siguientes:

Repeticiones	Tamaño n	$\tau$	var( $\tau$ )	A. Darling	p	Distribución
120	5	0.01719978	1.2212818	0.393	0.371	Normal
400	10	0.00025014	3.5389E-08	0.328	0.517	Normal
20	15	0.00031821	8.3116E-08	0.451	0.247	Normal
100	50	0.00026725	1.1451E-08	0.778	0.024	Logística
195	250	0.05271965	0.67785124	0.75	0.029	Logística
120	500	0.01596317	0.36382838	0.464	0.251	Normal
120	750	-0.00930337	0.33576253	0.308	0.557	Normal
35	1500	0.21700763	0.09741824	0.756	0.044	Normal
60	3500	0.00111029	0.07688643	0.221	0.824	Normal

Tabla 3.  
 Momentos asociados a las distintas distribuciones

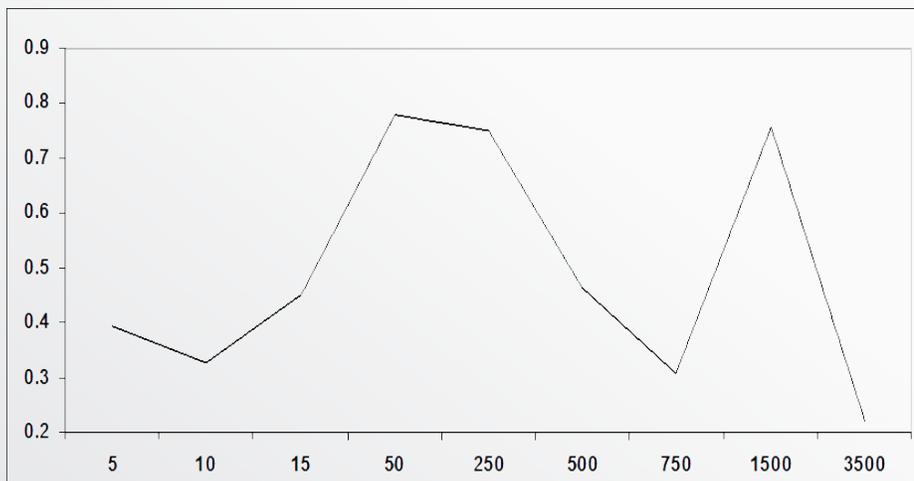


Figura 4.  
 Valor del estadístico Anderson-Darling vs. Tamaño de la muestra

n	$\bar{x}$	var(k)	A. Darling	p	Distribución
5	0.45734248	5.69958286	1.86	nd	lognormal
10	1.17308978	4.34599959	0.765	nd	lognormal
15	1.81725903	6.97781805	0.22	nd	lognormal
50	3.30995022	16.8441497	0.498	nd	lognormal
250	4.62861488	17.1783571	1.26	nd	lognormal
500	5.18518766	10.4498455	0.516	nd	lognormal
750	5.82148965	11.6966056	0.918	0.005	gamma
1500	5.99528277	3.61233506	0.212	0.843	normal
3500	5.53389568	2.44850281	0.392	0.369	lognormal

Tabla 4.  
 Momentos asociados a las distintas distribuciones

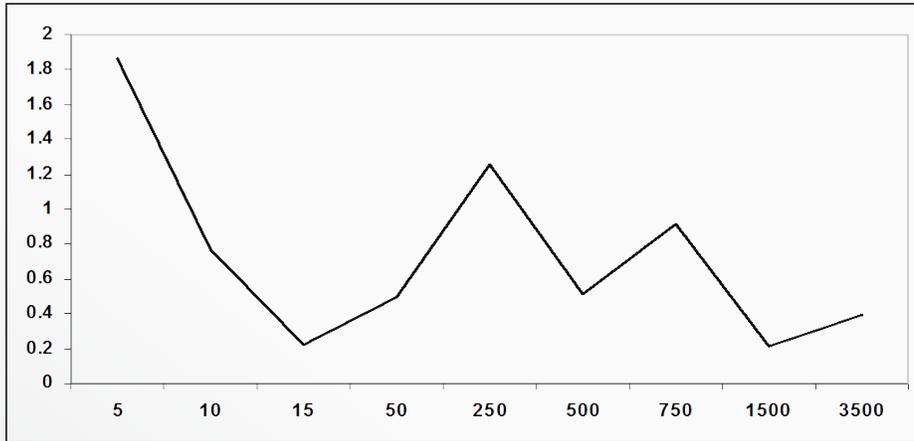


Figura 5.  
Valor del estadístico  
**Anderson-Darling vs.**  
**Tamaño de la muestra**

## Conclusiones

**E**l paradigma del riesgo en las fianzas ha cambiado en los últimos 20 años. De ser un semáforo financiero que manda señales, a un activo más que se compra y se vende todos los días en los mercados de derivados mediante los instrumentos de cobertura.

La Ingeniería Financiera y sus modelos econométricos (tales como el VAR), han hecho que las evaluaciones de riesgos se conviertan en algo cotidiano. Desde el punto de vista académico hacer suposiciones sobre la forma de la distribución probabilística de los riesgos puede ser visto como algo sin la mayor trascendencia. Desde la perspectiva de la práctica financiera puede ser la diferencia entre la ocurrencia o no de una catástrofe económica para un país o empresa.

A lo largo de este reporte hemos visto que no es cosa menor incorporar el supuesto de ruido blanco gaussiano para describir el comportamiento de las series de los rendimientos. Y que las pruebas de hipótesis asociadas a un estudio estadístico de este tipo de series, tiene importantes implicaciones en los rasgos característicos de estas distribuciones.

También este trabajo nos revela que al quitar este supuesto las distribuciones de los estimadores de los cuatro momentos convergen en distribución a una normal independientemente de la forma de la distribución de los rendimientos de los activos, pero sin embargo, no hay un procedimiento ni analítico ni numérico que nos permita conocer con exactitud el valor de las varianzas de los momentos aquí mencionados.

Esto limita hasta el día de hoy el conocimiento más profundo de este tipo de distribuciones, incluyendo el análisis comparativo que es tan necesario al momento de analizar los rendimientos de dos activos diferentes o del mismo activo pero en periodos distintos.

Estos temas quedan todavía abiertos a posibles aportaciones de investigaciones sobre estos temas. Por el momento nos conformamos con presentar un primer acercamiento que marque el punto de arranque de nuevas aportaciones.

## Dr. Fernando Servín y Silva

Doctorado en Administración

Universidad de Celaya

Profesor – investigador de tiempo completo de la Universidad de Celaya en el área de finanzas.



## REFERENCIAS

Bai Jushan y Ng Serena, (2005), Test for Skewness, Kurtosis, and Normality for Time Series Data. *Journal of Business & Economic Statistics*. Vol. 23, No. 1

Cohen, C. (1967), Estimation in Mixtures of Two Normal Distributions. *Technometrics*, 9, pp. 15-28.

Fama E., (1964), Random Walks in Stock Market Prices.

Gatheral Jim, (2007), Stylized Facts, Merrill Lynch.

Johansson A., (2005), Pricing Skewness and Kurtosis Risk on the Swedish Stock Market. Department of Economics, Lund University, Sweden.

Llinás H. J., (2006), Precisiones en la teoría de los modelos logísticos. *Revista Colombiana de Estadística*; Volumen 29 No 2. pp. 239 a 265.

Mandelbrot, B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36, pp. 394-419.

Mandelbrot, B. (1973), Comments on: "A Subordinated Stochastic Process with Finite Variance for Speculative Prices" by Peter C. Clark. *Econometrica*, 41, pp. 157-159.

Peiro Gimenez A., (1992), Distribución de los rendimientos de las acciones. *Estadística Española*. Vol. 34, Núm. 131, Págs. 431 a 453.

Popper K., (2005). *Conocimiento objetivo: un enfoque evolucionista*. Editorial Tecnos.